대분류	선형대수	캠퍼스		2회 선형대수(행렬-평면방정식) MT				시 간	점 수	담당선생
2회	행렬-평면방정식	성명		담당	홍창의	일시 : 4월 22일 금요일		60분		홍창의

유형 1 | 기본 문제 테스트

1. 두 벡터 $\vec{a}=(2,4)$, $\vec{b}=(-1,-3)$ 에 대하여 $\|\vec{a}+2\vec{b}\|$ 의 값은?

① 1 ② 2 ③ $\sqrt{12}$ ④ $\sqrt{17}$

2. 행렬식 $|A|=\begin{vmatrix} 5 & 5 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 5 & 2 \\ 2 & 5 & 2 & 5 \\ 2 & 5 & 5 & 5 \end{vmatrix}$ 의 값을 구하면?

① 2 ② 24 ③ 36 ④ 54

3. 세 점 $P(5,3,-4)$, $Q(1,a,2)$, $R(9,-1,b)$ 가 한 직선 상에 놓이도록 $a+b$ 의 값을 구하면?

① -5 ② -4 ③ -3 ④ -2

4. 두 점 $A(2,-3,1)$, $B(2,2,1)$ 을 연결하는 선분 AB 를 3 : 2 의 비율로 외분하는 점을 $P(a,\ b,\ c)$ 라 할 때 a 의 값은?

① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3

5. 행렬 $A=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$ 이고, $\vec{x}=(1,2,2)$ 일 때, 벡터 $A\vec{x}$ 의 크기(norm) $\|A\vec{x}\|$ 는?

①0 ② 1 ③ 2 ④ 3

6. 두 벡터 $(4x,-1,2)$와 $(1,-1,0)$ 의 사이각이 $\frac{\pi}{4}$ 가 되도록 x 의 값을 구하면?

① 0 ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{2}{3}$ ④ 1

7. 행렬 $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ 의 역행렬의 대각성분의 곱을 구하면?

① $\frac{1}{12}$ ② $\frac{1}{6}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{3}{16}$

8. 공간벡터 $\vec{a}=(x,1,-2)$, $\vec{b}=(0,y,2)$, $\vec{c}=(1,3,z)$ 가 서로 수직일 때, $x+y+z$ 의 값은?

① -17 ② -15 ③ -6 ④ 4

9. 벡터 $\vec{a}=(2, 3, 1)$ 위로의 벡터 $\vec{b}=(-1, 1, 2)$ 의 정사영벡터를 (a, b, c) 라 할 때 $7(b+c)$ 의 값을 구하면?

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8

10. 벡터 $\vec{a}=(1, 0, -1, -1)$, $\vec{b}=(0, 2, 1, 2)$ 로 생성되는 R^4 의 부분공간을 W 라하고, 벡터 $(1, 1, 1, -1)$ 에 가장 가까운 W 에 있는 벡터를 $\vec{x}=(a_1, a_2, a_3, a_4)$ 라 하자. $\vec{x}$ 의 성분 중 $3(a_1+a_2)$ 은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4

11. a, b, c 를 임의의 세 벡터, α, β 를 스칼라라고 할 때,
다음 중 옳지 않은 것의 개수는?(단, θ : a, b 가 이루는 각, $\|a\|$: $norm\ of\ a$, (a, b) : a, b 의 내적)

가) $(a, b)=(b, a)$

나) $(a+b, c)=(a, c)+(b, c)$

다) $(a, b)=\|a\|\ \|b\|\sin\theta$

라) $(\alpha a, \beta b)=\alpha\beta(a, b)$

① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3

12. 한 변의 길이가 2 인 정육면체의 변과 대각선을 이루는 각은?

① $\cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ ② $\cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

③ $\cos^{-1}(1)$ ④ $\cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

13. 연립방정식 $\begin{cases} x-\ y=4 \\ 2x+3y=1 \\ -2x+3y=3 \end{cases}$ 의 최소제곱해를 $\bar{x}, \bar{y}$ 라 할 때 $\bar{x}+\bar{y}$ 의 값을 구하면?

① $\frac{5}{17}$ ② $\frac{6}{17}$ ③ $\frac{7}{17}$ ④ $\frac{8}{17}$

14. 3 차원 직교좌표계의 기본단위벡터 $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ 에 대하여 $(\overrightarrow{2i}\times\vec{j})\times\vec{k}+\vec{i}\times(\vec{j}\times\overrightarrow{2i})$ 을 구하면?

① 0 ② $2\vec{i}$ ③ $2\vec{j}$ ④ $2\vec{k}$

15. 임의의 공간벡터 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 에 대한 다음 수식 중 옳은 것의 개수를 구하면?

(ㄱ) $\vert\vec{a}+\vec{b}\vert^2+\vert\vec{a}-\vec{b}\vert^2=2(\vert\vec{a}\vert^2+\vert\vec{b}\vert^2)$
(ㄴ) $(\vec{a}\cdot\vec{b})^2+\vert\vec{a}\times\vec{b}\vert^2=\vert\vec{a}\vert^2\vert\vec{b}\vert^2$
(ㄷ) $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}\ \geq\ 0$
(ㄹ) $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})=(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}$

①1 개 ② 2 개 ③ 3 개 ④ 4 개

16. $A(1, -1, 2)$, $B(2, 1, 3)$, $C(0, 2, 1)$ 에 대해 평면도형 $\{s\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{AC}\mid 0\ \leq\ s+t\ \leq\ 1\}$ 의 넓이는?

① $\frac{5}{2}$ ② $3\sqrt{2}$ ③ $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ ④ $\frac{5\sqrt{2}}{2}$

17. 다음 행렬의 계수를 구하면?

$$\begin{pmatrix} 0 & 5 & 2 & 4 & -5 \\ -5 & 0 & -3 & 2 & 6 \\ -2 & 3 & 0 & 7 & 0 \\ -4 & -2 & -7 & 0 & 8 \\ 5 & -6 & 0 & -8 & 0 \end{pmatrix}$$

①2 ②3 ③4 ④5

18. 벡터 $\vec{a}=(6,3,-1)$, 벡터 $\vec{b}=(0,1,2)$, 벡터 $\vec{c}=(4,2,-5)$ 로 만들어지는 육면체 부피를 구하면?

① 4 ② 18 ③ 26 ④ 32

19. 연립방정식 $\begin{cases} 2x+y+a=0 \\ ax-2y+3=0 \\ x+y+a=0 \end{cases}$ 의 해가 존재하도록 $2a$ 의 값을 구하면

① -3 ② -1 ③ 1 ④ 3

20. 3 차원 공간의 벡터 A, B, C 의 크기가 각각 $1, 2, 3$ 일 때 다음 조건 $A \cdot B=0$, $A \cdot C=0$, $(A\times B)\cdot C=3$ 을 만족한다.
이 때, $|(A\times B)\cdot(A\times C)|$ 의 값은?

① 1 ② $\sqrt{3}$ ③ $2\sqrt{3}$ ④ $3\sqrt{3}$

21. 세 점 $(1,-1,-1)$, $(1,2,1)$, $(-1,2,3)$ 을 지나는 평면에 수직이고, 점$(1,1,1)$ 을 지나는 직선의 방정식을 $\frac{x-a}{3}=\frac{y-1}{b}=\frac{z-1}{c}$ 라 할 때 $a+b+c$ 의 값을 구하면?

① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5

22. 연립방정식 $\begin{cases} x+\ y+3z=2 \\ x+2y+2z=3 \\ x+3y+sz=t \end{cases}$ 이 무한개의 해를 가질 때, $s+t$ 의 의 값을 구하면?

① 3 ② 5 ③ 7 ④ 9

23. 공간 상의 두 직선 $\frac{x+1}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z}{-1}$ 와 $x=2+t$, $y=1-t$, $z=1+2t$ 의 교점을 (a,b,c) 라 할 때 $a+b+c$ 의 값을 구하면?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4

24. 다음 중 벡터함수 $X(t)=(t^2,\ 3-t^2,-t)$ 와 평면 $3x-2y+z=0$ 의 교점을 (a,b,c) 라 할 때 $a+b+c$ 의 값을 구하면? (단, $t<0$ 이다.)

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4

25. 방정식 $x^2-2y^2-\lambda z^2-xy+5yz+2zx=0$이 두 평면을 나타내도록 λ 의 값을 구하면?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4

대분류	선형대수	캠퍼스		2회 선형대수(행렬-평면방정식) MT 해설			시 간	점 수	담당선생
2회	행렬-평면방정식	성명		담당	홍창의	일시 : 4월 22일 금요일	60분		홍창의

유형 1 기본 문제 테스트

1. 두 벡터 $\vec{a}=(2,4),\ \vec{b}=(-1,-3)$ 에 대하여 $\| \vec{a}+2\vec{b} \|$ 의 값은?

① 1 ② 2 ③ $\sqrt{12}$ ④ $\sqrt{17}$

【답】 ②

해설 $\vec{a}+2\vec{b}=(2,4)+(-2,-6)=(0,-2)$ 이므로

$\therefore \| \vec{a}+2\vec{b} \| = 2$

2. 행렬식 $|A| = \begin{vmatrix} 5 & 5 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 5 & 2 \\ 2 & 5 & 2 & 5 \\ 2 & 5 & 5 & 5 \end{vmatrix}$ 의 값을 구하면?

① 2 ② 24 ③ 36 ④ 54

【답】 ④

해설 행렬식의 정의를 이용하면 2 열을 기준으로 행렬식을 전개하면

$$\begin{vmatrix} 5 & 5 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 5 & 2 \\ 2 & 5 & 2 & 5 \\ 2 & 5 & 5 & 5 \end{vmatrix} = 3\cdot(-1)^{1+2}|M_{12}|$$

소행렬식의 정의 및 3 행에서 1 행을 빼면

$$= -3\begin{vmatrix} 2 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 5 \\ 2 & 5 & 5 \end{vmatrix} = -3\begin{vmatrix} 2 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= -3\cdot 3(-1)^{3+3}|M_{33}|$$

$$= -9\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 54$$

3. 세 점 $P(5,3,-4),\ Q(1,a,2),\ R(9,-1,b)$ 가 한 직선 상에 놓이도록 $a+b$ 의 값을 구하면?

① -5 ② -4 ③ -3 ④ -2

【답】 ③

해설 $\overrightarrow{PQ}=(-4,a-3,6),\ \overrightarrow{PR}=(4,-4,b+4)$ 이고, 세 점이 동일 직선상에 놓일 조건은 $\overrightarrow{PR}=t\overrightarrow{PQ}$ (단, t 는 실수)

$\therefore (4,-4,b+4)=(-4t,at-3t,6t)$

$\therefore a=7,\ b=-10$ 이므로 $a+b=-3$ 이다.

4. 두 점 $A(2,-3,1),\ B(2,2,1)$ 을 연결하는 선분 AB 를 3 : 2 의 비율로 외분하는 점을 $P(a,b,c)$ 라 할 때 a 의 값은?

① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3

【답】 ③

해설 외분점의 공식에 의해

$$\vec{P}=\frac{m\vec{B}-n\vec{A}}{m-n}=\frac{3(2,2,1)-2(2,-3,1)}{3-2}$$

$=(2,12,1)=(a,b,c)$이므로 $\therefore a=2$

5. 행렬 $A=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$ 이고, $\vec{x}=(1,2,2)$ 일 때, 벡터 $A\vec{x}$ 의 크기(norm) $\| A\vec{x} \|$ 는?

①0 ② 1 ③ 2 ④ 3

【답】 ④

해설 주어진 행렬은 열벡터의 크기가 1 이고, 열벡터들이 서로 수직하므로 직교행렬이다. 직교행렬의 내적의 불변의 법칙에 의해서

$\| A\vec{x} \| = \| \vec{x} \| = 3$ 이다.

6. 두 벡터 $(4x,-1,2)$와 $(1,-1,0)$ 의 사이각이 $\frac{\pi}{4}$ 가 되도록 x 의 값을 구하면?

① 0 ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{2}{3}$ ④ 1

【답】 ②

해설 내각의 정의를 이용하면

$$4x+1=\sqrt{16x^2+1+4}\cdot\sqrt{1+1+0}\cdot\cos\frac{\pi}{4}$$

$$=\sqrt{16x^2+5}\cdot\sqrt{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$=\sqrt{16x^2+5}$ 양변을 제곱하면

$16x^2+8x+1=16x^2+5$ 이므로 $\therefore x=\frac{1}{2}$

7. 행렬 $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ 의 역행렬의 대각성분의 곱을 구하면?

① $\frac{1}{12}$ ② $\frac{1}{6}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{3}{16}$

【답】 ①

해설 가우스−조르단 방법을 이용하여 역행렬을 구하면

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{array}\right)$$

$\left\{ 1\text{ 행}\times\frac{1}{2},\ 2\text{ 행}\times\frac{1}{2},\ 3\text{ 행}\times\frac{1}{3} \right.$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -\frac{3}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{array}\right)$$

$\left\{ 1\text{ 행}-2\text{ 행}\times\frac{1}{2} \right.$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{array}\right)$$

$\left\{ 1\text{ 행}+3\text{ 행}\times\frac{3}{4},\ 2\text{ 행}-3\text{ 행}\times\frac{1}{2} \right.$

따라서 대각성분의 곱은 $\frac{1}{12}$ 이다.

8. 공간벡터 $\vec{a}=(x,\ 1,-2),\ \vec{b}=(0,\ y,\ 2),\ \vec{c}=(1,\ 3,\ z)$ 가 서로 수직일 때, $x+y+z$ 의 값은?

① -17 ② -15 ③ -6 ④ 4

【답】 ①

해설 주어진 공간벡터가 수직이면 내적이 언제나 0 이므로 $\vec{a}=(x,\ 1,-2),\ \vec{b}=(0,\ y,\ 2),\ \vec{c}=(1,\ 3,\ z)$ 에서 각각의 벡터를 내적하면

i) $\vec{a}\circ\vec{b}=x\cdot 0+1\cdot y+(-2)\cdot 2=y-4=0$ 이므로 $y=4$

ii) $\vec{b}\circ\vec{c}=0\cdot 1+4\cdot 3+2\cdot z=2z+12=0$ 이므로 $z=-6$

iii) $\vec{a}\circ\vec{c}=x\cdot 1+1\cdot 3+(-2)\cdot(-6)=x+15=0$ 이므로 $x=-15$

9. 벡터 $\vec{a}=(2,\ 3,\ 1)$ 위로의 벡터 $\vec{b}=(-1,\ 1,\ 2)$ 의 정사영벡터를 $(a,\ b,\ c)$ 라 할 때 $7(b+c)$ 의 값을 구하면?

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8

【답】 ③

해설 $\|\vec{a}\|=\sqrt{14}$ 이고 $\vec{a}\bullet\vec{b}=3$ 이므로, 벡터 $\vec{a}$ 위로의 벡터 $\vec{b}$ 의 정사영벡터는 $\text{Proj}_{\vec{a}}\vec{b}=\frac{3}{14}(2,\ 3,\ 1)=\left(\frac{3}{7},\ \frac{9}{14},\ \frac{3}{14}\right)$ 이므로

$b+c=\frac{12}{14}=\frac{6}{7}$ 이다. 따라서 $7(b+c)=6$ 이다.

10. 벡터 $\vec{a}=(1,\ 0,-1,-1),\ \vec{b}=(0,\ 2,\ 1,\ 2)$ 로 생성되는 R^4 의 부분공간을 W 라하고, 벡터$(1,\ 1,\ 1,-1)$ 에 가장 가까운 W 에 있는 벡터를 $\vec{x}=(a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4)$ 라 하자. $\vec{x}$ 의 성분 중 $3(a_1+a_2)$ 은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4

【답】 ④

해설 $V_1,\ V_2$ 에 의해서 생성되는 R^4 의 부분공간 W 는

행렬 $A=\begin{pmatrix}1&0\\0&2\\-1&1\\-1&2\end{pmatrix}$ 의 열공간이다.

$AX=B \qquad \therefore\ X=(A^tA)^{-1}(A^tB)$

$$A^tA=\begin{pmatrix}1&0&-1&-1\\0&2&1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&2\\-1&1\\-1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&-3\\-3&9\end{pmatrix}=3\begin{pmatrix}1&-1\\-1&3\end{pmatrix}$$

$$(A^tA)^{-1}=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}3&1\\1&1\end{pmatrix}$$

$$A^tB=\begin{pmatrix}1&0&-1&-1\\0&2&1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$

$\therefore$ 해 $X=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}3&1\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$

$\text{Proj}_w U=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1&0\\0&2\\-1&1\\-1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\2\\-1\\0\end{pmatrix}$ 이므로

$3(a_1+a_2)=4$ 이다.

11. $a,\ b,\ c$ 를 임의의 세 벡터, α, β 를 스칼라라고 할 때, 다음 중 옳지 않은 것의 개수는?(단, θ : $a,\ b$ 가 이루는 각, $\|a\|$: norm of a, $(a,\ b)$: $a,\ b$ 의 내적)

가) $(a,\ b)=(b,\ a)$

나) $(a+b,c)=(a,\ c)+(b,\ c)$

다) $(a,\ b)=\|a\|\ \|b\|\sin\theta$

라) $(\alpha a,\ \beta b)=\alpha\beta(a,\ b)$

① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3

【답】 ②

해설 ③은 외적의 정의임

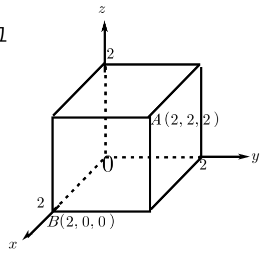
12. 한 변의 길이가 2 인 정육면체의 변과 대각선을 이루는 각은?

① $\cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ ② $\cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

③ $\cos^{-1}(1)$ ④ $\cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

【답】 ①

해설 주어진 조건에서 정육면체를 그리면 다음과 같고 정육면체의 모서리의 점을 그림에서처럼 잡으면 즉



$A(2,\ 2,\ 2),\ B(2,\ 0,\ 0)$ 라 하면

$\overrightarrow{OB}=(2,\ 0,\ 0),\ \overrightarrow{OA}=(2,\ 2,\ 2)$

$\therefore\ \cos\theta=\frac{\overrightarrow{OA}\circ\overrightarrow{OB}}{|\overrightarrow{OB}\|\overrightarrow{OB}|}=\frac{1}{\sqrt{3}}$

$\therefore\ \theta=\cos^{-1}\frac{1}{\sqrt{3}}$

13. 연립방정식 $\begin{cases}x-\ y=4\\2x+3y=1\\-2x+3y=3\end{cases}$ 의 최소제곱해를 $\bar{x},\ \bar{y}$ 라 할 때 $\bar{x}+\bar{y}$ 의 값을 구하면?

① $\frac{5}{17}$ ② $\frac{6}{17}$ ③ $\frac{7}{17}$ ④ $\frac{8}{17}$

【답】 ④

해설 $A=\begin{pmatrix}1&-1\\2&3\\-2&3\end{pmatrix}$, $\text{b}=\begin{pmatrix}4\\1\\3\end{pmatrix}$ 이므로

$$A^TA=\begin{pmatrix}1&2&-2\\-1&3&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1\\2&3\\-2&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9&-1\\-1&19\end{pmatrix}$$

$(A^TA)^{-1}=\frac{1}{170}\begin{pmatrix}19&1\\1&9\end{pmatrix}$ 이므로

$$\text{x}=(A^TA)^{-1}A^T\text{b}=\frac{1}{170}\begin{pmatrix}19&1\\1&9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&-2\\-1&3&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4\\1\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{4}{85}\\\frac{36}{85}\end{pmatrix}$$

$\therefore\ \bar{x}=\frac{4}{85},\ \bar{y}=\frac{36}{85}$ 이므로 $\bar{x}+\bar{y}=\frac{40}{85}=\frac{8}{17}$

14. 3 차원 직교좌표계의 기본단위벡터 $\vec{i},\ \vec{j},\ \vec{k}$ 에 대하여 $(2\vec{i}\times\vec{j})\times\vec{k}+\vec{i}\times(\vec{j}\times 2\vec{i})$ 을 구하면?

① 0 ② $2\vec{i}$ ③ $2\vec{j}$ ④ $2\vec{k}$

【답】 ③

해설 $\vec{i}\times\vec{j}=\vec{k},\quad \vec{j}\times\vec{i}=-\vec{k}$ 이다.

∴ 주어진 식 $=2\vec{k}\times\vec{k}+\vec{i}\times(-2\vec{k})=0+2\vec{j}=2\vec{j}$

15. 임의의 공간벡터 $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}$ 에 대한 다음 수식 중 옳은 것의 개수를 구하면?

(ㄱ) $|\vec{a}+\vec{b}|^2+|\vec{a}-\vec{b}|^2=2(|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2)$
(ㄴ) $(\vec{a}\cdot\vec{b})^2+|\vec{a}\times\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2$
(ㄷ) $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}\ \geq\ 0$
(ㄹ) $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})=(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}$

①1 개 ② 2 개 ③ 3 개 ④ 4 개

【답】 ②

해설 ① $|\vec{a}+\vec{b}|^2+|\vec{a}-\vec{b}|^2$

$=\vec{a}\cdot\vec{a}+2\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{a}-2\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{b}$

$=2\vec{a}\cdot\vec{a}+2\vec{b}\cdot\vec{b}=2(|\vec{a}|^2+|b|^2)$

② $(\vec{a}\cdot\vec{b})^2+|\vec{a}\times\vec{b}|^2=(|\vec{a}|\ |\vec{b}|\cos\theta)^2+(|\vec{a}|\ |\vec{b}|\sin\theta)^2$

$=|\vec{a}|^2|b|^2$

③ $\vec{a}\times\vec{b}$ 와 $\vec{c}$ 의 사이각이 $\dfrac{\pi}{2}$ 를 넘으면 $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}<0$ 이다.

④ $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})\neq(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}$

16. $A\,(1,-1,\,2),\ B\,(2,\,1,\,3),\ C\,(0,\,2,\,1)$ 에 대해 평면도형 $\{s\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{AC}\mid 0\leq s+t\leq 1\}$ 의 넓이는?

① $\dfrac{5}{2}$ ② $3\sqrt{2}$ ③ $\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$ ④ $\dfrac{5\sqrt{2}}{2}$

【답】 ④

해설 삼각형의 변적은 평행사변형의 면적의 반이므로 외적을 이용하여 구해보자. 따라서

$\overrightarrow{AB}=(1,\ 2,\ 1),\ \overrightarrow{AC}=(-1,\ 3,-1)$

$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \end{vmatrix}=-5i+0j+5k$ 이다.

$\therefore|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|=5\sqrt{2}$ 이므로

삼각형의 면적은 $S=\dfrac{1}{2}|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|$ 이다.

$\therefore S=\dfrac{5\sqrt{2}}{2}$

17. 다음 행렬의 계수를 구하면?

$$\begin{pmatrix} 0 & 5 & 2 & 4 & -5 \\ -5 & 0 & -3 & 2 & 6 \\ -2 & 3 & 0 & 7 & 0 \\ -4 & -2 & -7 & 0 & 8 \\ 5 & -6 & 0 & -8 & 0 \end{pmatrix}$$

①2 ②3 ③4 ④5

【답】 ③

해설 주어진 행렬은 반대칭행렬이고 홀수차이므로 반대칭행렬의 성질을 이용하면 행렬식의 값이 영이다. 그리고 4차 정방행렬의 행렬중에 적어도 하나가 영이 아니므로 행렬의 계수는 4 이다.

18. 벡터 $\vec{a}=(6,3,-1)$, 벡터 $\vec{b}=(0,\ 1,\ 2)$, 벡터 $\vec{c}=(4,\ 2,-5)$ 로 만들어지는 육면체 부피를 구하면?

① 4 ② 18 ③ 26 ④ 32

【답】 ③

해설 직육면체의 부피는 벡터의 삼중 곱을 이용하면

$\vec{a}\cdot\vec{b}\times\vec{c}=\begin{vmatrix} 6 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & -5 \end{vmatrix}=-30+24+4-24=-26$ 이므로 평행육면체의 부피는 $V=|\vec{a}\cdot\vec{b}\times\vec{c}|=26$ 이다.

19. 연립방정식 $\begin{cases} 2x+y+a=0 \\ ax-2y+3=0 \\ x+y+a=0 \end{cases}$ 의 해가 존재하도록 $2a$ 의 값을 구하면

① -3 ② -1 ③ 1 ④ 3

【답】 ①

해설 주어진 비제차 연립방정식의 해가 존재하기 위해서는 계수행렬의 rank와 첨가행렬의 rank가 같아야 한다. 지금 계수행렬의 rank는 가장 크면 2 이고 첨가행렬은 가장 크면 3 이므로 계수행렬의rank와 첨가행렬의 rank가 같기 위해서는 첨가행렬의 rank가 2 가 되어야 하므로 첨가행렬의 적어도 한행은 0 이어야 하므로 첨가행렬식의 값은 0 이어야 한다. 따라서

$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -a \\ a & -2 & -3 \\ 1 & 1 & -a \end{bmatrix}=4a-a^2-3-2a+6+a^2$

$=2a+3=0$ 에서 $a=-\dfrac{3}{2}$ 이므로

따라서 $2a=-3$ 이다.

20. 3 차원 공간의 벡터 $A,\,B,\,C$ 의 크기가 각각 $1,\,2,\,3$ 일 때 다음 조건 $A\cdot B=0,\ A\cdot C=0,\ (A\times B)\cdot C=3$ 을 만족한다.
이 때, $|(A\times B)\cdot(A\times C)|$ 의 값은?

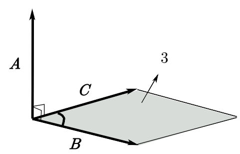
① 1 ② $\sqrt{3}$ ③ $2\sqrt{3}$ ④ $3\sqrt{3}$

【답】 ④

해설 주어진 조건 $A\cdot B=0,\,A\cdot C=0$ 에서 $A\perp B,\,C$ 이고 또 $(A\times B)\cdot C=3$ 의 의미는 $A,\,B,\,C$ 을 세 변으로 하는 평행 육면체의 부피이므로 이 때, A 의 크기가 1 이므로 높이가 1 이고 밑변을 $B,\,C$ 으로 하는 평행 육면체의 부피이므로 따라서 부피는 $B,\,C$ 를 두 변으로 하는 평행사변형의 면적과 같다. 따라서

$S=|B\times C|=|B||C|\sin\theta=3$ 에서 $\sin\theta=\dfrac{1}{2}$ 이므로

$\theta=\dfrac{\pi}{6}$ 이다.



$|(A\times B)\cdot(A\times C)|=|A\cdot(C\times(A\times B))|$

$=|A\cdot\{(C\cdot B)A-(C\cdot A)B\}|=|A\cdot\{(C\cdot B)A\}|$

$=\left|A\cdot(3\sqrt{3})A\right|=3\sqrt{3}$

21. 세 점 $(1,-1,-1),\ (1,\,2,\,1),\ (-1,\ 2,\ 3)$ 을 지나는 평면에 수직이고, 점$(1,\ 1,\ 1)$ 을 지나는 직선의 방정식을 $\dfrac{x-a}{3}=\dfrac{y-1}{b}=\dfrac{z-1}{c}$ 라 할 때 $a+b+c$ 의 값을 구하면?

① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5

【답】 ①

해설 세 점 $A(1,-1,-1)$, $(1,2,1)$, $C(-1,2,3)$ 을 지나는 평면방정식에 수직한 벡터는

$\vec{N}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 3 & 2 \\ -2 & 3 & 4 \end{vmatrix}=6i-4j+6k$ 이므로

∴ 직한 직선의 방향비$[3,-2,3]$이고 점$(1,1,1)$ 을 지나는 직선의 방정식 $\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y-1}{-2}=\dfrac{z-1}{3}$이므로

$a=1,\ b=-2,\ c=3$ 이다. 따라서 $a+b+c=2$ 이다.

22. 연립방정식 $\begin{cases} x+\ \ y+3z=2 \\ x+2y+2z=3 \\ x+3y+sz=t \end{cases}$ 이 무한개의 해를 가질 때, $s+t$ 의 의 값을 구하면?

① 3 ② 5 ③ 7 ④ 9

【답】 ②

해설 연립방정식이 무한히 많은 해를 갖기 위해서는 계수행렬의 rank 와 첨가행렬의 rank가 같아야 한다.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & s & t \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & s-2 & t-3 \end{array}\right)$$

$\begin{cases} 2\text{ 행}-1\text{ 행} \\ 3\text{ 행}-1\text{ 행} \end{cases}$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & s-1 & t-4 \end{array}\right)$$

$\{3\text{ 행}-2\text{ 행}$

이므로 해를 무수히 많이 갖기 위해서는 $s=1,\ t=4$ 이다.

따라서 $s+t=5$

23. 공간 상의 두 직선 $\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z}{-1}$ 와 $x=2+t,\ y=1-t,\ z=1+2t$ 의 교점을 (a,b,c) 라 할 때 $a+b+c$ 의 값을 구하면?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4

【답】 ②

해설 $\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z}{-1}$ 와 $x=2+t,\ y=1-t,\ z=1+2t$

이 만나는 교점을 (x_0,y_0,z_0) 라 하면 이 점을 직선에 대입하면

$\dfrac{x_0+1}{2}=\dfrac{y_0-1}{1}=\dfrac{z_0}{-1}\equiv k$ 에서

$\therefore \begin{cases} x_0=2k-1=2+t \\ y_0=k+1=1-t \\ z_0=-k=1+2t \end{cases}$

위 식에서 $\therefore\ t=-1,\ k=1$ 이다.

$\therefore\ x_0=1,\ y_0=2,\ z_0=-1$ 이므로 $a+b+c=2$ 이다.

24. 다음 중 벡터함수 $X(t)=(t^2,\ 3-t^2,-t)$ 와 평면 $3x-2y+z=0$ 의 교점을 (a,b,c) 라 할 때 $a+b+c$ 의 값을 구하면? (단, $t<0$ 이다.)

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4

【답】 ④

해설 벡터함수 $X(t)=(t^2,\ 3-t^2,-t)$ 에서 $x=t^2,\ y=3-t^2,\ z=-t$ 을 평면 $3x-2y+z=0$ 에 대입하면 $3(t^2)-2(3-t^2)-t=0$ 에서

$5t^2-t-6=(t+1)(5t-6)=0$ 이므로 $t=-1,\ t=\dfrac{6}{5}$ 이다. 따라서 문제 조건에서

$t=-1$ 일 때 교점은 $(1,\ 2,\ 1)$이므로 $a+b+c=4$ 이다.

25. 방정식 $x^2-2y^2-\lambda z^2-xy+5yz+2zx=0$이 두 평면을 나타내도록 λ 의 값을 구하면?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4

【답】 ③

해설 $x^2-2y^2-\lambda z^2-xy+5yz+2zx=0$ 를

x 에 대한 2 차방정식의 형태로 고치면

$x^2-(y-2z)x-2y^2-\lambda z^2+5yz=0$ 가 된다.

$$x=\frac{y-2z\pm\sqrt{(y-2z)^2-4(-2y^2-\lambda z^2+5yz)}}{2}$$
$$=\frac{y-2z\pm\sqrt{9y^2-24zy+4(1+\lambda)z^2}}{2}$$

식에서 근호 안의 것이 중근을 가져야 전체가 x,y,z 에 대한 1 차식이 되므로

$f(y)=9y^2-24zy+4(1+\lambda)z^2$ 일 때

$\dfrac{D}{4}=(12z)^2-9\{4(1+\lambda)z^2\}=0$

$\Leftrightarrow z^2\{4-(1+\lambda)\}=0 \quad \therefore\ \lambda=3$