대분류	선형대수	캠퍼스		1회 선형대수 행렬 MT 문제				시 간	점 수	담당선생
1회	행렬,행렬식,행렬종류	성명		담당	홍창의	일시 : 3월 23일 수요일		60분		홍창의

1. 3×2 행렬 $A=(a_{ij})$ 를 $\begin{cases} a_{ij}=j & (i \leq j) \\ a_{ij}=-i+j & (i>j) \end{cases}$ 라고 정의 할 때, 행렬 A 의 모든 성분의 합은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4

2. 이차 정사각행렬 A 에 대하여 $A\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$, $A^2\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ 일 때, $A\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$ 의 모든 원소의 합은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4

3. $A=\begin{pmatrix}3 & 2\\-2 & -1\end{pmatrix}$ 일 때 $A^5=pA+qE$ 이다. pq 의 값은?
(단, E는 2 차 단위행렬임)

① -20 ② -12 ③ 0 ④ 15

4. 자연수 n 에 대하여 $(1+\sqrt{2})^n=a_n+b_n\sqrt{2}$ 는 (a_n, b_n 유리수)라 하면 $\begin{pmatrix}a_{n+1}\\b_{n+1}\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}a_n\\b_n\end{pmatrix}$ $(n=1,2,\cdots)$가 될 때 $trace(A)$ 의 값은?

① -6 ② -4 ③ 2 ④ 8

5. $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\100 & 8 & 9\\4 & 0 & 3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\2 & 1 & 0\\3 & 2 & 2\end{pmatrix}$ 에 대해 행렬 $A^2(B^{-1})^2$ 의 행렬식의 값은?

① 7 ② $\dfrac{29}{2}$ ③ 12 ④ 16

6. $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\-1 & 2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & -1\\2 & 1\end{pmatrix}$ 일 때 $2A+A^tB=\begin{pmatrix}a & b\\c & d\end{pmatrix}$ 이면 $a+b+c+d$ 의 값은?

① 10 ② 11 ③ 12 ④ 13

7. 행렬식 $|A|=\begin{vmatrix}1 & -1 & 1 & -1 & 1\\0 & 2 & -2 & 2 & -2\\0 & 0 & 3 & -3 & 3\\0 & 0 & 0 & 4 & -4\\1 & 0 & 0 & 0 & 5\end{vmatrix}$ 의 값을 나눌 수 있는 소수들은 모두 몇 개인가?

① 2 ② 3 ③ 5 ④ 6

8. 행렬 $\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\0 & 1 & 1\\3 & 5 & a\end{pmatrix}$ 이 역행렬을 갖지 않을 때 a 의 값을 구하시오.

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4

9. 행렬식 $\begin{vmatrix} 0 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \end{vmatrix}$ 의 값은?

① 160 ② -160 ③ 80 ④ -80

10. $A^3=0$ 이 되는 행렬 A에 대하여 $(I-A)$ 의 역행렬은?
(여기서 I는 항등행렬, 즉 $AI=IA=A$)

① $I+A+A^2$ ② $I-A+A^2$
③ $I+A-A^2$ ④ $I-A-A^2$

11. 4×4 행렬 A 의 행렬식(determinant) 이 a 일 때, $2A$ 의 행렬식은?

① $2a$ ② $4a$ ③ $8a$ ④ $16a$

12. 행렬식 $\begin{vmatrix} a & a & a \\ a & b & b \\ a & b & c \end{vmatrix}$ 를 인수분해 했을 때, 그 인수가 아닌 것은?

① a ② $b-a$ ③ $c-b$ ④ $a-c$

13. 다음 행렬식을 올바르게 인수분해 한 것은 무엇인가?

$$\begin{vmatrix} 0 & c & b & a \\ a & d & 0 & 0 \\ b & e & 0 & 0 \\ c & 0 & e & d \end{vmatrix}$$

① $-(ae-bd)^2$ ② $-(bc-de)^2$ ③ $(ae-bd)^2$ ④ $(bc-de)^2$

14. 행렬식 $\begin{vmatrix} a & b & c \\ \alpha & \beta & \gamma \\ x & y & z \end{vmatrix}=3$ 일 때, $\begin{vmatrix} x-a & 3\alpha & 2a \\ y-b & 3\beta & 2b \\ z-c & 3\gamma & 2c \end{vmatrix}$ 의 값을 구하면?

① 24 ② -24 ③ 18 ④ -18

15. 모든 실수 x 에 대하여 행렬 $\begin{pmatrix} x+2 & 4 \\ k-1 & x \end{pmatrix}$ 의 역행렬이 존재하고 x 축과 만나지 않기 위한 k 값?

① 0 ② $\dfrac{4}{3}$ ③ 2 ④ 3

16. 행렬식 $\begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 & 5 & -1 \\ -2 & 0 & -3 & 2 & 6 \\ -3 & 3 & 0 & 7 & 0 \\ -5 & -2 & -7 & 0 & 8 \\ 1 & -6 & 0 & -8 & 0 \end{vmatrix}$ 의 값을 구하면?

① 0 ② 9 ③ 16 ④ 25

17. 다음 행렬 중 직교행렬인 것은?

① $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ ② $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

③ $\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ \sqrt{3} & -\sqrt{3} & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ ④ $\begin{pmatrix} \cos\theta & i\sin\theta \\ i\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

18. 행렬 $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$의 역행렬 A^{-1}에서 2 행의 합을 a라 할 때 $4a$를 구하면?

① -1 ② -2 ③ -3 ④ -4

19. $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$일 때 $|adj\,(2A)|$를 구하면?

① -2^5 ② -4^5 ③ -6^5 ④ -8^5

20. 3×3 행렬 $A=(a_{ij})$의 곱 A^2의 행렬식의 값을 구하면?
(단, $a_{ij}=w^{i\cdot j}$이고 w는 $w^3=1$ 식을 만족하는 복소수이다.)

① 0 ② 1 ③ 4 ④ -27

21. 두 행렬 $A, B\in R^{n\times n}$에 대하여 다음의 설명 중 틀린 것은?

(가) A와 B의 행렬식이 모두 0이 아니면, AB의 행렬식도 0이 아니다.
(나) A와 B가 대칭행렬이면 AB도 대칭행렬이다.
(다) $A^2=AB$이고 A가 영행렬이 아니면 $A=B$이다.
(라) $A^2=B$이고 B가 A의 역행렬이면 $A=I$이다.
(단, I는 항등행렬이다.)

① (가), (나) ② (나), (다) ③ (다), (라) ④ (나), (라)

22. 정방행렬 A와 B의 역행렬을 각각 A^{-1}와 B^{-1}라하고, 행렬 I는 단위행렬(identity matrix)이라 할 때, 다음 중 성립하지 않는 것은?

① $(I+AB)^{-1}A=A(I+BA)^{-1}$
② $A^{-1}+B^{-1}=A^{-1}(A+B)B^{-1}$
③ $(A^{-1}+B^{-1})^{-1}=B(A+B)^{-1}A$
④ $(I+A^{-1})^{-1}=(A+I)^{-1}A^{-1}$

23. 행렬식 $\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{vmatrix}$의 값이 0일 때, $x^2+y^2+4z^2$의 최솟값은?

① 1 ② 2 ③ $\frac{18}{23}$ ④ $\frac{36}{23}$

24. 행렬 $A=\begin{pmatrix} 5 & 8 & 1 \\ 2 & -3 & 6 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$

이고, $a_{ij}=a_{ji},\ b_{ij}=-b_{ji}\ \ (i=1,\ 2,\ j=1,\ 2)$ 일 때, $\sum_{i=1}^{3}(a_{1i}+b_{ii})$ 의

값을 구하면?

① 5 ② 9 ③ 12 ④ 18

25. 행렬 $A=\begin{pmatrix} \frac{7}{10} & \frac{1}{5} \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$, $P=\begin{pmatrix} a & -2 \\ 3 & b \end{pmatrix}$ 일 때,

$P^{-1}AP=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$ 이 되는 실수 $a+b$ 는 ?

① 5 ② 7 ③ 9 ④ 11

대분류	선형대수	캠퍼스		1회 선형대수 행렬 MT 해설			시 간	점 수	담당선생
1회	행렬,행렬식, 행렬종류	성명		담당	홍창의	일시 : 3월 23일 수요일	60분		홍창의

1. 3×2 행렬 $A=(a_{ij})$ 를 $\begin{cases} a_{ij}=j & (i \leq j) \\ a_{ij}=-i+j & (i > j) \end{cases}$ 라고 정의 할 때, 행렬 A 의 모든 성분의 합은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4

【답】 ①

해설 $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$

따라서, 행렬 A 의 모든 성분의 합은 1 이다.

2. 이차 정사각행렬 A 에 대하여 $A\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$, $A^2\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ 일 때, $A\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$ 의 모든 원소의 합은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4

【답】 ③

해설 주어진 조건에서 $A^2\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=AA\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$

$A\begin{pmatrix}1 & 1\\0 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2\\2 & 1\end{pmatrix}$ 에서 A 를 구하면

$\therefore A=\begin{pmatrix}1 & 2\\2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\0 & 2\end{pmatrix}^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 2\\2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & -1\\0 & 1\end{pmatrix}$

$=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}2 & 1\\4 & -1\end{pmatrix}$ 이므로

따라서 $A\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}2 & 1\\4 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}5\\1\end{pmatrix}$ 이다.

$A\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$ 의 모든 원소의 합은 3 이다.

3. $A=\begin{pmatrix}3 & 2\\-2 & -1\end{pmatrix}$ 일 때 $A^5=pA+qE$ 이다. pq 의 값은?
(단, E는 2 차 단위행렬임)

① -20 ② -12 ③ 0 ④ 15

【답】 ①

해설 $A^2=\begin{pmatrix}3 & 2\\-2 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 2\\-2 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5 & 4\\-4 & -3\end{pmatrix}$

$A^4=\begin{pmatrix}5 & 4\\-4 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5 & 4\\-4 & -3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9 & 8\\-8 & -7\end{pmatrix}$

$\therefore$ 위의 행렬의 1 행 1 열 원소를 나열하면 $3, 5, 7, 9, \cdots$ 이므로 일반항은 $a_n=2n+1$ 이므로

주어진 행렬에서 1 행 1 열의 원소만 알면 다른 행렬의 원소들은 구할 수 있다. 즉

$\therefore A^n=\begin{pmatrix}2n+1 & 2n\\-2n & -2n+1\end{pmatrix}$ 이므로 준식에서

여기서 $n=5$ 을 대입하면

$\begin{pmatrix}11 & 10\\-10 & -9\end{pmatrix}=p\begin{pmatrix}3 & 2\\-2 & -1\end{pmatrix}+q\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}3p+q & 2p\\-2p & -p+q\end{pmatrix}$ 계수비교하면

$\therefore 3p+q=11,\ 2p=10$ 에서 $p=5,\ q=-4$

$\therefore pq=-20$

4. 자연수 n 에 대하여 $(1+\sqrt{2})^n=a_n+b_n\sqrt{2}$ 는 (a_n, b_n 유리수)라 하면 $\begin{pmatrix}a_{n+1}\\b_{n+1}\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}a_n\\b_n\end{pmatrix}$ $(n=1, 2, \cdots)$가 될 때 $trace(A)$ 의 값은?

① -6 ② -4 ③ 2 ④ 8

【답】 ③

해설 $(1+\sqrt{2})^n=a_n+b_n\sqrt{2}$ 에서

i) $n=1$ 일 때 $(1+\sqrt{2})=1+\sqrt{2}$ 이므로 $\therefore a_1=1,\ b_1=1$

ii) $n=2$ 일 때 $(1+\sqrt{2})^2=3+2\sqrt{2}$ 이므로

$\therefore a_2=3,\ b_2=2$

iii) $n=3$ 일 때 $(1+\sqrt{2})^3=7+5\sqrt{2}$ 이므로 $\therefore a_3=7,\ b_3=5$

$\therefore \begin{pmatrix}a_{n+1}\\b_{n+1}\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}a_n\\b_n\end{pmatrix}$ 에서

$n=1 \Rightarrow \begin{pmatrix}a_2\\b_2\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}a_1\\b_1\end{pmatrix}$ 이므로

$\therefore A\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$ ……… ①

$n=2 \Rightarrow \begin{pmatrix}a_3\\b_3\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}a_2\\b_2\end{pmatrix}$ 이므로

$\therefore A\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7\\5\end{pmatrix}$ ……… ②

①, ② 에서 $A\begin{pmatrix}1 & 3\\1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 7\\2 & 5\end{pmatrix}$ 에서

$A=\begin{pmatrix}3 & 7\\2 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 3\\1 & 2\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}3 & 7\\2 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2 & 3\\1 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2\\1 & 1\end{pmatrix}$

$trace(A)=2$

5. $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\100 & 8 & 9\\4 & 0 & 3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\2 & 1 & 0\\3 & 2 & 2\end{pmatrix}$ 에 대해 행렬 $A^2(B^{-1})^2$ 의 행렬식의 값은?

① 7 ② $\frac{29}{2}$ ③ 12 ④ 16

【답】 ④

해설 $|A|=\begin{vmatrix}1 & 0 & 1\\100 & 8 & 9\\4 & 0 & 3\end{vmatrix}=-8,\ |B|=\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\2 & 1 & 0\\3 & 2 & 2\end{vmatrix}=2$

이므로

$|A^2(B^{-1})^2|=|A^2||(B^{-1})^2|=|A|^2|B|^{-2}$

$=\frac{|A|^2}{|B|^2}=\frac{(-8)^2}{2^2}=16$ 이다.

6. $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\-1 & 2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & -1\\2 & 1\end{pmatrix}$ 일 때 $2A+A^tB=\begin{pmatrix}a & b\\c & d\end{pmatrix}$ 이면 $a+b+c+d$ 의 값은?

① 10 ② 11 ③ 12 ④ 13

【답】 ②

해설 $2A+A^tB=2\begin{pmatrix}1 & 2\\-1 & 2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & -1\\2 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1\\2 & 1\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}2 & 4\\-2 & 4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1 & -2\\6 & 0\end{pmatrix}$

$$=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

계수를 비교하면 $\therefore\ a=1, b=2, c=4, d=4$ 이므로

따라서 $a+b+c+d=11$ 이다.

7. 행렬식 $|A|=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{vmatrix}$ 의 값을 나눌 수 있는 소수들은 모두 몇 개인가?

① 2 ② 3 ③ 5 ④ 6

【답】 ②

해설 주어진 행렬식을 행렬식의 성질을 이용하여 구하면

5 열에서 4 열을 더하면

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{vmatrix}$$

5 열을 기준의로 행렬식의 정의를 이용하면

준식$=5\cdot(-1)^{5+5}|M_{55}|$

$$=5\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}$$

4 행을 기준으로 행렬식의 정의를 이용하면

$$=5\cdot 4\cdot(-1)^{4+4}|M_{44}|$$

$$=20\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}$$

3 행을 기준으로 행렬식의 정의를 이용하면

$$=20\cdot 3\cdot(-1)^{3+3}|M_{33}|=60\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}=120$$

을 소인수분해하면

$\therefore\ 120=2^3\times 3\times 5$ 이므로 소수의 개수는 3 개다.

8. 행렬 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & a \end{pmatrix}$이 역행렬을 갖지 않을 때 a 의 값을 구하시오.

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4

【답】 ②

해설 역행렬을 갖지 않을 조건은 행렬식의 값이 0 이어야 한다.

따라서 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & a \end{vmatrix}=a+3-5=0$ 이므로 $a=2$ 이다.

9. 행렬식 $\begin{vmatrix} 0 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \end{vmatrix}$ 의 값은?

① 160 ② -160 ③ 80 ④ -80

【답】 ①

해설 블록행렬식을 이용하여 행렬식의 구하면

$$\begin{vmatrix} 0 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 1 & 7 & 0 \\ 3 & 0 & 8 \\ 0 & 4 & 0 \end{vmatrix}=(-5)(-32)=160$$

10. $A^3=0$ 이 되는 행렬 A에 대하여 $(I-A)$ 의 역행렬은?
(여기서 I는 항등행렬, 즉 $AI=IA=A$)

① $I+A+A^2$ ② $I-A+A^2$
③ $I+A-A^2$ ④ $I-A-A^2$

【답】 ①

해설 역행렬의 정의를 이용하면 즉 행렬은 교환법칙이 성립하고 행렬의 곱이 단위행렬이 되도록 한다.

식을 변형하면 즉 $A^3=0$ 에서 양변에 단위행렬을 빼면

$A^3-I=-I$의 양변을 -1 을 곱하면

$\therefore\ I-A^3=I$을 인수분해하면

$(I-A)(I+A+A^2)=I$ 이므로

$(I+A+A^2)(I-A)=I$ 이 성립하므로 교환법칙이 성립하고

그 결과가 단위행렬이므로 $I-A$ 의 역행렬은 $I+A+A^2$이다.

$\therefore\ I+A+A^2=(I-A)^{-1}$

11. 4×4 행렬 A 의 행렬식(determinant) 이 a 일 때, $2A$ 의 행렬식은?

① $2a$ ② $4a$ ③ $8a$ ④ $16a$

【답】 ④

해설 $|A|=a$ 일 때 $|2A|=2^4|A|=16a$

12. 행렬식 $\begin{vmatrix} a & a & a \\ a & b & b \\ a & b & c \end{vmatrix}$를 인수분해 했을 때, 그 인수가 아닌 것은?

① a ② $b-a$ ③ $c-b$ ④ $a-c$

【답】 ④

해설 주어진 행렬식에서 1 행의 공통인수a 를 뽑아내면

$$\begin{vmatrix} a & a & a \\ a & b & b \\ a & b & c \end{vmatrix}=a\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & b \\ a & b & c \end{vmatrix}$$ (2 열$-$1 열 , 3 열$-$1 열)

$$=a\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & b-a & b-a \\ a & b-a & c-a \end{vmatrix}$$

(2 열의 공통인수를 뽑아내면)

$$=a(b-a)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & b-a \\ a & 1 & c-a \end{vmatrix}$$

$$=a(b-a)\begin{vmatrix} 1 & b-a \\ 1 & c-a \end{vmatrix}$$ (사러스 법칙을 이용하면)

$$=a(b-a)\{c-a-(b-a)\}$$

$$=a(b-a)(c-b)$$

13. 다음 행렬식을 올바르게 인수분해 한 것은 무엇인가?

$$\begin{vmatrix} 0 & c & b & a \\ a & d & 0 & 0 \\ b & e & 0 & 0 \\ c & 0 & e & d \end{vmatrix}$$

① $-(ae-bd)^2$ ② $-(bc-de)^2$ ③ $(ae-bd)^2$ ④ $(bc-de)^2$

【답】 ①

해설 블록행렬을 이용하여 인수분해하자.

주어진 행렬식에서 2 행과 4 행를 교환하면

$$\begin{vmatrix} 0 & c & b & a \\ a & d & 0 & 0 \\ b & e & 0 & 0 \\ c & 0 & e & d \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 0 & c & b & a \\ c & 0 & e & d \\ b & e & 0 & 0 \\ a & d & 0 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} b & a \\ e & d \end{vmatrix}\begin{vmatrix} b & e \\ a & d \end{vmatrix} = -(ae-bd)^2$$

14. 행렬식 $\begin{vmatrix} a & b & c \\ \alpha & \beta & \gamma \\ x & y & z \end{vmatrix} = 3$ 일 때, $\begin{vmatrix} x-a & 3\alpha & 2a \\ y-b & 3\beta & 2b \\ z-c & 3\gamma & 2c \end{vmatrix}$ 의 값을 구하면?

① 24 ② −24 ③ 18 ④ −18

【답】 ④

해설 2 열과 3 열의 공통인수를 밖으로 뽑아내면

$$\begin{vmatrix} x-a & 3\alpha & 2a \\ y-b & 3\beta & 2b \\ z-c & 3\gamma & 2c \end{vmatrix} = 6\begin{vmatrix} x-a & \alpha & a \\ y-b & \beta & b \\ z-c & \gamma & c \end{vmatrix} = 6\begin{vmatrix} x & \alpha & a \\ y & \beta & b \\ z & \gamma & c \end{vmatrix}$$

{1 열+3 열 {1 열과 3 열을 교환하면

$$= -6\begin{vmatrix} a & \alpha & x \\ b & \beta & y \\ c & \gamma & z \end{vmatrix}$$ (행과 열을 교환하면)

$$= -6\begin{vmatrix} a & b & c \\ \alpha & \beta & \gamma \\ x & y & z \end{vmatrix} = -18$$

15. 모든 실수 x 에 대하여 행렬 $\begin{pmatrix} x+2 & 4 \\ k-1 & x \end{pmatrix}$ 의 역행렬이 존재하고 x 축과 만나지 않기 위한 k 값?

① 0 ② $\frac{4}{3}$ ③ 2 ④ 3

【답】 ①

해설 모든 실수 x 에 대하여 $\begin{pmatrix} x+2 & 4 \\ k-1 & x \end{pmatrix}$ 가 역행렬이 존재하기 위해서는 $\therefore\ (x+2)x-4(k+1) \neq 0$ 이 성립하여야 한다.

$\therefore\ x^2+2x-4(k-1) \neq 0$ (모든 실수)

$\frac{D}{4} = 1+4(k-1) < 0$

$\therefore\ k < \frac{3}{4}$ 을 만족하는 k 값을 찾으면 된다.

16. 행렬식 $\begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 & 5 & -1 \\ -2 & 0 & -3 & 2 & 6 \\ -3 & 3 & 0 & 7 & 0 \\ -5 & -2 & -7 & 0 & 8 \\ 1 & -6 & 0 & -8 & 0 \end{vmatrix}$ 의 값을 구하면?

① 0 ② 9 ③ 16 ④ 25

【답】 ①

해설 주어진 행렬은 반 대칭행렬이고 5 차식이므로 행렬식의 값은 0 이다.

17. 다음 행렬 중 직교행렬인 것은?

① $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ ② $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

③ $\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ \sqrt{3} & -\sqrt{3} & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ ④ $\begin{pmatrix} \cos\theta & i\sin\theta \\ i\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

【답】 ③

해설 행렬 A가 $AA^t = A^tA = E$ 이 성립할 때 A가 직교행렬이다.

① $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

② $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{4} & 1 \\ 1 & \frac{5}{4} \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

③ $\left\{\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{3} & 1 \\ \sqrt{2} & \sqrt{-3} & 1 \\ \sqrt{2} & 0 & -2 \end{pmatrix}\right\}^t \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{3} & 1 \\ \sqrt{2} & \sqrt{-3} & 1 \\ \sqrt{2} & 0 & -2 \end{pmatrix}$

$= \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ \sqrt{3} & \sqrt{-3} & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{3} & 1 \\ \sqrt{2} & \sqrt{-3} & 1 \\ \sqrt{2} & 0 & -2 \end{pmatrix}$

$= \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

④ $AA^t = \begin{pmatrix} \cos\theta & i\sin\theta \\ i\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\theta & i\sin\theta \\ i\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} \cos^2\theta-\sin^2\theta & 2i\cos\theta\sin\theta \\ 2i\cos\theta\sin\theta & \cos^2\theta-\sin^2\theta \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

18. 행렬 $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ 의 역행렬 A^{-1} 에서 2 행의 합을 a 라 할 때 $4a$ 를 구하면?

① −1 ② −2 ③ −3 ④ −4

【답】 ①

해설 $|A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \\ 1 & 4 & 1 \end{vmatrix} = -8$이고 크래머 공식을 이용하면

$A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2$

$A_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3$

$A_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 1$

이므로 2 행의 원소의 합은 $a = -\frac{1}{4}$ 이므로 $4a = -1$ 이다.

19. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ 일 때 $|adj\,(2A)|$ 를 구하면?

① -2^5 ② -4^5 ③ -6^5 ④ -8^5

【답】 ④

해설 $|A| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}$

$= -\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix} = -(-3+2+3) = -2$ 이고

수반행렬의 정의 $\begin{cases} adj\,(\alpha A) = \alpha^{n-1}adj\,(A) \\ |adj\,(A)| = |A|^{n-1} \end{cases}$ 을 이용하면

$|adj\,(2A)| = |2^3 adj\,(A)| = 8^4\,|adj\,(A)| = 8^4(-2)^3 = -8^5$

20. 3×3 행렬 $A=(a_{ij})$의 곱 A^2의 행렬식의 값을 구하면? (단, $a_{ij}=w^{i\cdot j}$이고 w는 $w^3=1$ 식을 만족하는 복소수이다.)

① 0 ② 1 ③ 4 ④ -27

【답】 ④

해설 $w^3=1$ 의 한 허근을 w 라 하였으므로

$w^3-1=(w-1)(w^2+w+1)=0$ 에서 $w^2+w+1=0$ 이다.

$$|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} w & w^2 & w^3 \\ w^2 & w^4 & w^6 \\ w^3 & w^6 & w^9\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} w & w^2 & 1 \\ w^2 & w & 1 \\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} w-1 & w^2-1 & 0 \\ w^2-1 & w-1 & 0 \\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} w-1 & w^2-1 \\ w^2-1 & w-1\end{vmatrix}$$

$$=(w-1)^2\begin{vmatrix} 1 & w+1 \\ w+1 & 1\end{vmatrix}=(w-1)^2(-w^2-2w)$$

$$=(-3w)(1-w)=3(w^2-w)=3(-2w-1)$$

따라서 $|A^2|=|A\cdot A|=|A|\cdot|A|$

$$=9(-2w-1)^2=9(4w^2+4w+1)=-27$$

21. 두 행렬 $A,\ B\in R^{n\times n}$ 에 대하여 다음의 설명 중 <u>틀린</u> 것은?

(가) A 와 B의 행렬식이 모두 0 이 아니면, AB의 행렬식도 0 이 아니다.

(나) A 와 B가 대칭행렬이면 AB도 대칭행렬이다.

(다) $A^2=AB$이고 A가 영행렬이 아니면 $A=B$이다.

(라) $A^2=B$이고 B가 A의 역행렬이면 $A=I$이다. (단, I는 항등행렬이다.)

① (가), (나) ② (나), (다) ③ (다), (라) ④ (나), (라)

【답】 ②

해설 (가) $|AB|=|A||B|$ 이므로 : 성립

(나) A 와 B가 대칭행렬이면 AB는 대칭행렬이 아닐 수도 있다.

: 틀림, 반례 : $A=\begin{pmatrix}1 & 0 \\ 0 & 2\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1 & -1 \\ -1 & 2\end{pmatrix}$ 이면

$$AB=\begin{pmatrix}1 & 0 \\ 0 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1 \\ -1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & -1 \\ -2 & 0\end{pmatrix}$$

(다) A가 역행렬이 존재할 때만 성립한다. : 틀림

(라) $A^2=B$일 때 문제조건에서 $B=A^{-1}$ 이므로 A 을 곱하면 $A^3=I$이다. 또 이 식을 인수분해하면 $(A-I)(A^2+A+I)=0$ 에서 $A^2+A+I=0$ 을 만족하는 실수 행렬은 존재하지 않으므로 $A=I$이다. : 맞음

22. 정방행렬 A와 B의 역행렬을 각각 A^{-1} 와 B^{-1} 라하고, 행렬 I는 단위행렬(identity matrix)이라 할 때, 다음 중 성립하지 않는 것은?

① $(I+AB)^{-1}A=A(I+BA)^{-1}$

② $A^{-1}+B^{-1}=A^{-1}(A+B)B^{-1}$

③ $(A^{-1}+B^{-1})^{-1}=B(A+B)^{-1}A$

④ $(I+A^{-1})^{-1}=(A+I)^{-1}A^{-1}$

【답】 ④

해설 ① $((I+AB)^{-1}A)^{-1}=A^{-1}(I+AB)=A^{-1}+A^{-1}AB$
$$=A^{-1}+B$$

$(A(I+BA)^{-1})^{-1}=(I+BA)A^{-1}=A^{-1}+BAA^{-1}=A^{-1}+B$

$\therefore\ (I+AB)^{-1}A=A(I+BA)^{-1}$

② $A^{-1}(A+B)B^{-1}=A^{-1}AB^{-1}+A^{-1}BB^{-1}=B^{-1}+A^{-1}$

$\therefore\ A^{-1}+B^{-1}=A^{-1}(A+B)B^{-1}$

③ $(B(A+B)^{-1}A)^{-1}=A^{-1}(A+B)B^{-1}$
$$=A^{-1}AB^{-1}+A^{-1}BB^{-1}$$
$$=B^{-1}+A^{-1}$$

$\therefore\ (A^{-1}+B^{-1})^{-1}=B(A+B)^{-1}A$

④ $((A+I)^{-1}A^{-1})^{-1}=A(A+I)=A^2+A$

$\therefore\ (I+A^{-1})^{-1}\neq(A+I)^{-1}A^{-1}$

23. 행렬식 $\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1\end{vmatrix}$ 의 값이 0 일 때, $x^2+y^2+4z^2$ 의 최솟값은?

① 1 ② 2 ③ $\dfrac{18}{23}$ ④ $\dfrac{36}{23}$

【답】 ③

해설 행렬식의 성질을 이용하면

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} x & y & z & 1-x \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1\end{vmatrix}$$

4열$-$1열

$$=-\begin{vmatrix} y & z & 1-x \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1\end{vmatrix}=-[6(1-x)-3y-2z]\text{에서}$$

$6x+3y+2z-6=0$ 이다.

코시$-$슈바르쯔 공식을 적용하면 즉

$(a^2+b^2+c^2)(\square^2+\triangle^2+☆^2)\geq(a\square+b\triangle+c☆)^2$

(단, 등호는 $\dfrac{\square}{a}=\dfrac{\triangle}{b}=\dfrac{☆}{c}$)

$(6^2+3^2+1^2)(x^2+y^2+4z^2)\ \geq\ (6x+3y+2z)^2$

$(36+9+1)(x^2+y^2+4z^2)\ \geq\ 36$ 이므로

$x^2+y^2+z^2\ \geq\ \dfrac{36}{46}$ 이므로 최솟값은 $\dfrac{18}{23}$ 이다.

24. 행렬 $A=\begin{pmatrix} 5 & 8 & 1 \\ 2 & -3 & 6 \\ 3 & 0 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33}\end{pmatrix}$

이고, $a_{ij}=a_{ji},\ b_{ij}=-b_{ji}\ \ (i=1,\ 2,\ j=1,\ 2)$ 일 때, $\displaystyle\sum_{i=1}^{3}(a_{1i}+b_{ii})$ 의 값을 구하면?

① 5 ② 9 ③ 12 ④ 18

【답】 ③

해설 주어진 조건에서 $a_{ij}=a_{ji},\ b_{ij}=-b_{ji}$은 대칭행렬과 교대행렬이므로 주어진 행렬 A를 대칭행렬과 교대행렬의 합으로 나타내어서 주어진 값을 구하여야 한다. 따라서 행렬 A를 대칭행렬과 교대행렬의 합으로 표현하면

$A=\dfrac{1}{2}(A+A^t)+\dfrac{1}{2}(A-A^t)$ 이므로

$A=\begin{pmatrix} 5 & 8 & 1 \\ 2 & -3 & 6 \\ 3 & 0 & 3\end{pmatrix}$ 일 때

대칭행렬$=\frac{1}{2}(A+A^t)=\frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix}5&8&1\\2&-3&6\\3&0&3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}5&2&3\\8&-3&0\\1&6&3\end{pmatrix}\right]$

$=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}10&10&4\\10&-6&6\\4&6&6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5&5&2\\5&-3&3\\2&3&3\end{pmatrix}$

반대칭행렬$=\frac{1}{2}(A-A^t)=\frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix}5&8&1\\2&-3&6\\3&0&3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}5&2&3\\8&-3&0\\1&6&3\end{pmatrix}\right]$

$=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0&6&-2\\-6&0&6\\2&-6&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&3&-1\\-3&0&3\\1&3&0\end{pmatrix}$

따라서 주어진 행렬을 대칭행렬의 형태와 반대칭 행렬의 형태의 합으로 나타낼 수 있다.

$\therefore \begin{pmatrix}5&8&1\\2&-3&6\\3&0&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5&5&2\\5&-3&3\\2&3&3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&3&-1\\-3&0&3\\1&3&0\end{pmatrix}$이므로

$\sum_{i=1}^{3}(a_{1i}+b_{ii})=(a_{11}+a_{12}+a_{13})+(b_{11}+b_{22}+b_{33})=12$

25. 행렬 $A=\begin{pmatrix}\frac{7}{10}&\frac{1}{5}\\\frac{3}{4}&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$, $P=\begin{pmatrix}a&-2\\3&b\end{pmatrix}$일 때,

$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1&0\\0&\frac{1}{5}\end{pmatrix}$이 되는 실수 $a+b$는?

① 5 ② 7 ③ 9 ④ 11

【답】 ②

해설 $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1&0\\0&\frac{1}{5}\end{pmatrix}$을 변형시켜서 A를 구하면

$\therefore A=\begin{pmatrix}a&-2\\3&b\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&\frac{1}{5}\end{pmatrix}\frac{1}{ab+6}\begin{pmatrix}b&2\\-3&a\end{pmatrix}$

$=\frac{1}{ab+6}\begin{pmatrix}a&-2\\3&b\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b&2\\-\frac{3}{5}&\frac{a}{5}\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}\frac{5ab+6}{5(ab+6)}&\frac{8a}{5(ab+6)}\\\frac{12b}{5(ab+6)}&\frac{30+ab}{5(ab+6)}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{7}{10}&\frac{1}{5}\\\frac{3}{4}&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$

계수 비교하면 $a=2,\ b=5$이므로 $a+b=7$이다.